ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΛ 211: Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Ενδιάμεση Εξέταση

Ημερομηνία : Παρασκευή, 17 Μαρτίου 2017
Διάρκεια : 9.00 – 10.30
Διδάσκουσα : Άννα Φιλίππου

Ονοματεπώνυμο: **ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ**

Αριθμός Ταυτότητας:

Οδηγίες:

- Να διαβάσετε προσεχτικά και να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις. Να γράψετε τις απαντήσεις σας (καθαρά) στον χώρο που σας δίνεται στο εξεταστικό δοκίμιο. Αν χρειάζεστε επιπρόσθετο χώρο μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την τελευταία σελίδα του δοκιμίου. Σε τέτοια περίπτωση δηλώστε καθαρά το σημείο στο οποίο βρίσκεται η συνέχεια της άσκησης. Αν βρεθείτε σε αδιέξοδο εξηγήστε τι προσπαθείτε να κάνετε ώστε, ενδεχομένως, να κερδίσετε κάποιες μονάδες.
- Ο πιο κάτω πίνακας δηλώνει την κατανομή των μονάδων στα θέματα. Το πλήθος των μονάδων δεν αποτελεί μέτρο δυσκολίας: είναι δυνατό δυσκολότερο πρόβλημα να αποφέρει λιγότερες μονάδες.

Καλή Επιτυχία!

Πρόβλημα	Μονάδες	Βαθμός
1	30	
2	20	
3	35	
4	15	
Σύνολο	100	

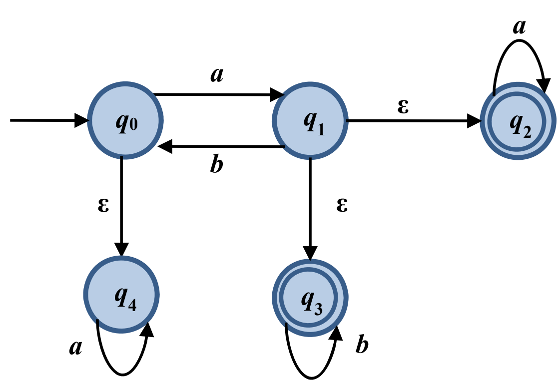
***<u>Πρόβλημα 1</u>* [30 μονάδες]**

Θεωρήστε το μη ντετερμινιστικό αυτόματο $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ με

- *σύνολο καταστάσεων το $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$,*
- *αλφάβητο το $\Sigma = \{a,b\}$,*
- *σύνολο τελικών καταστάσεων το $F = \{q_2, q_3\}$, και*
- *συνάρτηση μεταβάσεων δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:*

δ	a	b	ε
q_0	$\{q_1\}$	$\varnothing$	$\{q_4\}$
q_1	$\varnothing$	$\{q_0\}$	$\{q_2,q_3\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$
q_3	$\varnothing$	$\{q_3\}$	$\varnothing$
q_4	$\{q_4\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

(α) ***[6 μονάδες]*** *Να παρουσιάσετε το αυτόματο γραφικά μέσω ενός διαγράμματος μεταβάσεων και να δείξετε ότι το αυτόματο αποδέχεται τη λέξη ababb παρουσιάζοντας τη σχετική ακολουθία καταστάσεων που οδηγεί σε αποδοχή.*



Αποδοχή *ababb*: $q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{b} q_0 \xrightarrow{a} q_1 \xrightarrow{\varepsilon} q_3 \xrightarrow{b} q_3 \xrightarrow{b} q_3$

(β) ***[9 μονάδες]*** *Να μετατρέψετε το NFA αυτόματο από το μέρος (α) σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο χρησιμοποιώντας την κατασκευή που μελετήσαμε στο μάθημα.*

(γ) ***[6 μονάδες]*** *Να κατασκευάσετε αυτόματο που να αποδέχεται το συμπλήρωμα της γλώσσας L, όπου L η γλώσσα του αυτόματου από το μέρος (β).*

Αντιστρέφουμε τις τελικές με τις μη-τελικές καταστάσεις στο αυτόματο από το μέρος (β).

*(δ) **[9 μονάδες]** Να κατασκευάσετε αυτόματο (DFA ή NFA) που να αποδέχεται τη γλώσσα L^R, όπου L η γλώσσα του αυτόματου από το μέρος (β).*

(Υπενθύμιση: Για οποιαδήποτε γλώσσα A ορίζουμε $A^R = \{a^R \mid a \in A\}$ όπου a^R η ανάστροφη της λέξης a.)

- Αντιστρέφουμε τις ακμές.
- Η αρχική κατάσταση γίνεται τελική.
- Δημιουργούμε καινούρια αρχική κατάσταση η οποία με ε-μεταβάσεις οδηγεί στις αρχικά τελικές.

Πρόβλημα 2 ***[20 μονάδες]***

Θεωρήστε τη γλώσσα

$$L = \{ a^i b^j \mid i, j \geq 0,\ j = 2i \}.$$

Να κατασκευάσετε ασυμφραστική γραμματική η οποία να παράγει όλες τις λέξεις επί του αλφάβητου {a,b} που ΔΕΝ ανήκουν στη γλώσσα L.

Να εξηγήσετε τη λειτουργία της γραμματικής σας άτυπα αλλά με σαφήνεια.

- Λέξεις με τουλάχιστον ένα *b* πριν από κάποιο *a*

$$A \rightarrow XbXaX$$

$$X \rightarrow aX \mid bX \mid \varepsilon$$

- Λέξεις της μορφής $a^i b^j$, $j > 2i$

$$B \rightarrow aBbb \mid Y$$

$$Y \rightarrow b \mid bY$$

- Λέξεις της μορφής $a^i b^j$, $j < 2i$

$$C \rightarrow aCbb \mid aWb \mid Z$$

$$Z \rightarrow a \mid aZ$$

$$W \rightarrow \varepsilon \mid Z$$

- Ζητούμενη γραμματική

$$S \rightarrow A \mid B \mid C$$

<u>Πρόβλημα 3</u> [35 μονάδες]

Θεωρήστε τη γλώσσα

$L = \{\ uxvx\ \ |\ u,v \in \{0,1,2\}^*, |u| = |v|, x \in \{0,1,2\}$, και όλα τα στοιχεία του v είναι μικρότερα από το x $\}$

(α) **[20 μονάδες]** Να αποδείξετε ότι η γλώσσα L *δεν* είναι κανονική συμπληρώνοντας κατάλληλα τα κενά στην πιο κάτω ελλιπή απόδειξη:

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η L είναι κανονική. Από το Λήμμα της Άντλησης, συνεπάγεται ότι υπάρχει ακέραιος p, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιος ώστε κάθε λέξη $w \in L$, με μήκος $|w| \geq p$, μπορεί να γραφτεί ως $w = xyz$ έτσι ώστε (i) $|xy| \leq p$, (ii) $|y| > 0$ και (iii) για κάθε ακέραιο $i \geq 0$, η λέξη $xy^iz \in L$.

Επιλέγουμε τη λέξη w = ____ .

Προφανώς $|w|$ = ______________________ $\geq p$.

Από τις συνθήκες (i) και (ii) έπεται ότι

x = ______________________________ ,

y = ______________________________ ,

z = ______________________________ ,

όπου ____ .

Επιλέγουμε i = ___________ .

Τότε xy^iz = ____ .

Παρατηρούμε ότι ____

____

____

____

____

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η γλώσσα L είναι μη κανονική.

(β) **[15 μονάδες]** Να αποδείξετε ότι η γλώσσα L είναι ασυμφραστική επιδεικνύοντας ένα αυτόματο στοίβας που να την αναγνωρίζει.

Να εξηγήσετε τη λειτουργία του αυτομάτου σας άτυπα αλλά με σαφήνεια.

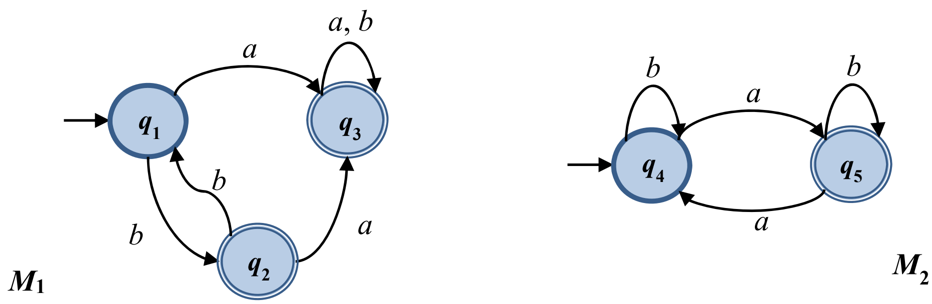
<u>Πρόβλημα 4</u> [15 μονάδες]

Έστω δύο γλώσσες A και B. Ορίζουμε ως την πιο κάτω γλώσσα:

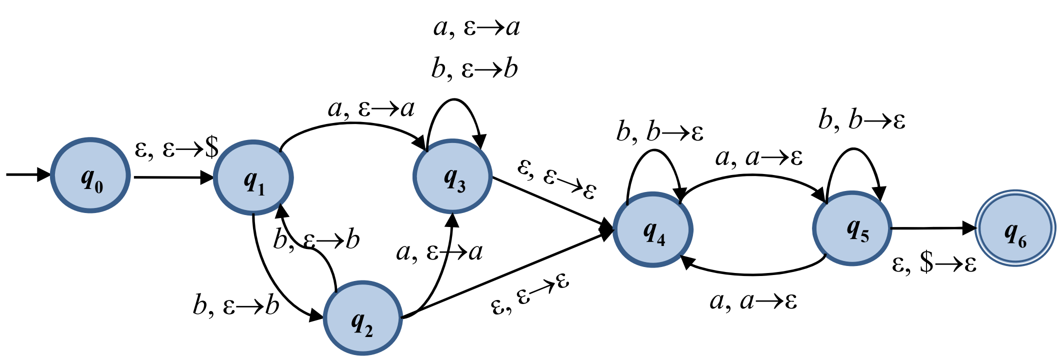
$$A\Diamond B = \{\, xy \mid x \in A,\ y \in B,\ x = y^R \,\}$$

Με λόγια, η γλώσσα A◊B περιέχει όλες τις λέξεις που αποτελούν τη συναρμογή μίας λέξης από το A με μία λέξη από το B, όπου η πρώτη λέξη είναι η ανάστροφη της δεύτερης. Για παράδειγμα, για A = {0, 10, 01, 010} και B = {0, 01, 11, 010} έχουμε A◊B = {00, 1001, 010010}.

(α) ***[7 μονάδες]*** *Θεωρήστε τα πιο κάτω αυτόματα M_1 και M_2. Να παρουσιάσετε αυτόματο στοίβας M το οποίο να αποδέχεται τη γλώσσα $L(M_1)\Diamond L(M_2)$ όπου $L(M_1)$ η γλώσσα του αυτόματου M_1 και $L(M_2)$ η γλώσσα του αυτόματου M_2.*



Το ζητούμενο αυτόματο έχει ως εξής:



*(β) **[8 μονάδες]** Γενικεύστε τις παρατηρήσεις σας από το μέρος (α) για να επιχειρηματολογήσετε ότι αν δύο γλώσσες A και B είναι κανονικές τότε η γλώσσα A◊B είναι ασυμφραστική.*

Για να δείξουμε το ζητούμενο υποθέτουμε ότι $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ είναι ένα DFA αυτόματο που αναγνωρίζει τη γλώσσα A και $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ είναι ένα DFA αυτόματο που αναγνωρίζει τη γλώσσα B. Θα δείξουμε ότι υπάρχει αυτόματο στοίβας που αναγνωρίζει τη γλώσσα $A \oplus B$. Το αυτόματο αυτό είναι το αυτόματο P $= (Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0, q_f\}, \Sigma \cup \{\$\}, \delta, q_0, \{q_f\})$, όπου

$$\delta(q,a,b) = \begin{cases} (q_1, \$) & \alpha\nu\ q = q_0, a = b = \varepsilon \\ (\delta_1(q,a), a) & \alpha\nu\ q \in Q_1, b = \varepsilon \\ (q_2, \varepsilon) & \alpha\nu\ q \in F_1, a = b = \varepsilon \\ (\delta_2(q,a), \varepsilon) & \alpha\nu\ q \in Q_2, b = a \\ (q_f, \varepsilon) & \alpha\nu\ q \in F_2, a = \varepsilon, b = \$ \end{cases}$$

Με λόγια, το αυτόματο αυτό ξεκινά γράφοντας το σύμβολο \$ για να αναγνωρίζει τον πάτο της στοίβας. Στη συνέχεια διαβάζει την είσοδο και τη χειρίζεται σύμφωνα με το αυτόματο M_1 και τη συνάρτηση μεταβάσεων δ_1 με τη διαφορά ότι σε κάθε ανάγνωση συμβόλου τοποθετεί το σύμβολο μέσα στη στοίβα για να γνωρίζει τη λέξη που έχει διαβαστεί. Όταν φτάσει σε τελική κατάσταση του αυτομάτου M_1 υπάρχει η δυνατότητα χωρίς να διαβάσει σύμβολο από την είσοδο και χωρίς να διαβάσει ή να γράψει στη στοίβα να προχωρήσει στην αρχική κατάσταση του αυτομάτου που αναγνωρίζει τη γλώσσα B. Από τις καταστάσεις αυτές χειρίζεται την είσοδο σύμφωνα με το δεύτερο αυτόματο με τη διάφορα ότι με κάθε σύμβολο που διαβάζει πρέπει το ίδιο σύμβολο μα εμφανίζεται στην κορυφή της στοίβας το οποίο και αφαιρεί. Αν καταλήξει σε τελική κατάσταση του αυτομάτου B και η στοίβα αδειάσει τότε το αυτόματο οδηγείται στην κατάσταση q_f οπόταν θα αποδεχθεί τη λέξη.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το αυτόματο στοίβας P αποδέχεται μια λέξη w αν και μόνο αν $w \in A \oplus B$:

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $w \in L(T)$. Τότε η w μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = w_1 w_2 \ldots w_m$ όπου κάθε $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, και υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q$ και ακολουθία λέξεων $s_0, s_1, \ldots, s_m \in \Gamma^*$ που να ικανοποιούν τις συνθήκες:

- $r_0 = q_0$ και $s_0 = \varepsilon$
- Για κάθε $i = 0,\ldots,m-1$, $(r_{i+1}, \mathrm{b}) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, όπου $s_i = at$ και $s_{i+1} = bt$ για κάποια $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ και $t \in \Gamma^*$, και
- $r_m = q_f$

Τότε, από τον ορισμό του P, $r_1, \ldots, r_k \in Q_1$, $r_{k+1}, \ldots, r_{m-1} \in Q_2$, r_1 η αρχική κατάσταση του αυτόματου M_1 και $r_k \in F_1$, r_{k+1} η αρχική κατάσταση του αυτόματου M_2 και $r_{m-1} \in F_2$ ενώ οι δύο ακολουθίες πρέπει να είναι ανάστροφες η μια της άλλης αφού στην πρώτη ακολουθία εισάγουμε τα στοιχεία στη στοίβα, ενώ στη δεύτερη ακολουθία αφαιρούμε τα ίδια στοιχεία σε αντίστροφη σειρά. Συνεπώς, w = εαβε, όπου $\alpha = \beta^R$. Συμπεραίνουμε ότι $w \in A \oplus B$.

Η αντίθετη κατεύθυνση, σύμφωνα με την οποία αν $w \in A \oplus B$ τότε $w \in L(P)$ ακολουθεί όμοια επιχειρήματα.