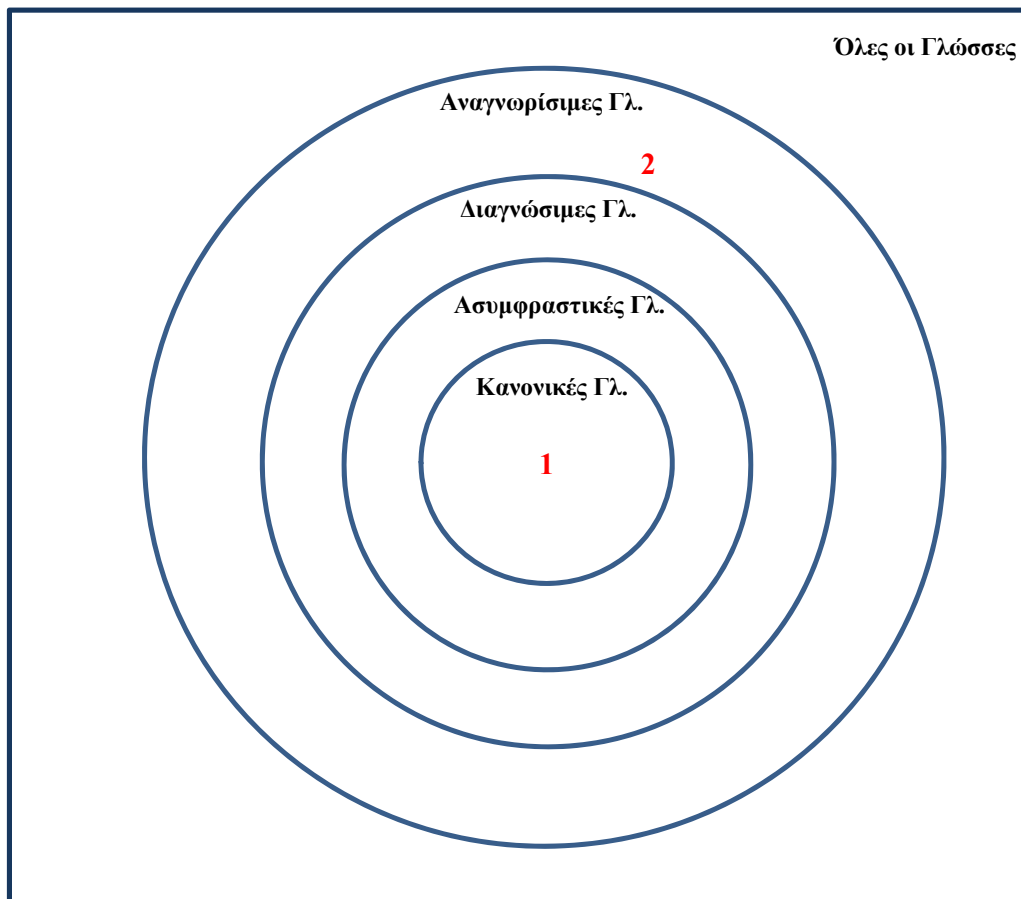


## Σειρά Προβλημάτων 5

Ημερομηνία Παράδοσης: 19/04/19

### **Άσκηση 1 [20 μονάδες]**

Πιο κάτω υπάρχει ένα σχεδιάγραμμα που τοποθετεί τις κλάσεις των κανονικών, ασυμφραστικών, διαγνώσιμων και αναγνωρίσιμων γλωσσών μέσα στο σύνολο όλων των γλωσσών. Ακολουθούν 12 αριθμημένες γλώσσες. Να γράψετε τον αριθμό κάθε γλώσσας στην κλάση που ανήκει. Σαν παράδειγμα έχουν ήδη τοποθετηθεί στο διάγραμμα οι αριθμοί των δύο πρώτων γλωσσών: η γλώσσα με αριθμό **1** είναι κανονική ενώ η γλώσσα με αριθμό **2** είναι αναγνωρίσιμη (αλλά δεν είναι ούτε διαγνώσιμη, ούτε ασυμφραστική, ούτε κανονική).



1.  $\Sigma^*$
2.  $A_{TM}$  (Το πρόβλημα της Αποδοχής σε Μηχανές Turing)
3.  $\{ \langle M, k \rangle \mid \text{το } M \text{ είναι μια μηχανή Turing επί του αλφάβητου } \{0,1\} \text{ η οποία απορρίπτει κάποια λέξη μήκους } k \}$
4.  $\{ \langle D, G \rangle \mid \text{το } D \text{ είναι ένα DFA και το } G \text{ μια ασυμφραστική γραμματική όπου κάθε λέξη που αναγνωρίζεται από το } D \text{ παράγεται από τη } G \}$
5.  $\{ a^n \mid n = k^2 \text{ για κάποιο } k > 0 \}$
6. 3-SAT

7.  $\{ \langle M, k \rangle \mid \text{το } M \text{ είναι μια μηχανή Turing επί του αλφάβητου } \{0,1\} \text{ η οποία απορρίπτει κάποια λέξη μέσα στις } k \text{ πρώτες κινήσεις της} \}$
8.  $\{ w \mid w \in \{0,1\}^* \text{ και } \eta \text{ έχει περιττό μήκος και το μεσαίο της σύμβολο είναι } 0 \}$
9.  $\{ \langle M \rangle \mid \eta \text{ } M \text{ είναι μια TM η οποία δεν αποδέχεται κάποια λέξη} \}$
10.  $\{ wa^k \mid w \in \{a,b\}^* \text{ και } k > m \text{ όπου } m \text{ το πλήθος των } a \text{ που υπάρχουν στη λέξη } w \}$
11.  $\{ \langle D_1, D_2 \rangle \mid \text{τα } D_1 \text{ και } D_2 \text{ είναι δύο DFA που παράγουν μια κοινή λέξη μήκους } 100 \}$
12.  $\{ a^n \mid n \bmod 3 = 0 \text{ ή } n \bmod 4 = 0 \}$

### **Άσκηση 2 [30 μονάδες]**

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσες δεν είναι διαγνώσιμες.

- (α)  $\{ \langle M, q \rangle \mid \eta \text{ } M \text{ είναι μια TM και } q \text{ μια κατάσταση της } M \text{ η οποία είναι αδρανής} \}$
- (β)  $\{ \langle M \rangle \mid \eta \text{ } M \text{ είναι μια TM η οποία περιέχει αδρανείς καταστάσεις} \}$

[Σημείωση: Αδρανής κατάσταση μιας TM είναι μια κατάσταση στην οποία η μηχανή δεν μεταβαίνει ποτέ, όποια κι αν είναι η λέξη εισόδου.]

### **Άσκηση 3 [20 μονάδες]**

Θεωρήστε το αλφάβητο  $\Sigma$  και δύο γλώσσες  $L_1$  και  $L_2$  επί του αλφάβητου  $\Sigma$ . Ορίζουμε ως  $\text{Merge}_1(L_1, L_2)$  και  $\text{Merge}_2(L_1, L_2)$  τις πιο κάτω γλώσσες επί του αλφάβητου  $\Sigma$ :

$$\text{Merge}_1(L_1, L_2) = \{ w \mid w = u_1v_1u_2v_2 \dots u_nv_n \text{ όπου } u = u_1 \dots u_n \in L_1 \text{ και } v = v_1 \dots v_n \in L_2 \text{ και } u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma \}$$

$$\text{Merge}_2(L_1, L_2) = \{ w \mid w = u_1v_1u_2v_2 \dots u_nv_n \text{ όπου } u = u_1 \dots u_n \in L_1 \text{ και } v = v_1 \dots v_n \in L_2 \text{ και } u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n \in \Sigma^* \}$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η κλάση NP είναι κλειστή ως προς τις πράξεις  $\text{Merge}_1$  και  $\text{Merge}_2$ .
- (β) Ισχύει το ίδιο για την κλάση P; Αποδείξτε την απάντησή σας.

### **Άσκηση 4 [30 μονάδες]**

Η εταιρεία στην οποία εργάζεστε έχει δημιουργήσει ένα πρωτοποριακό ρομπότ για διεκπεραίωση δύσκολων χειρουργικών επεμβάσεων. Ως ειδική/ός στη χρήση του ρομπότ, έχετε κληθεί να διοργανώσετε ένα σεμινάριο εκπαίδευσης σε πιθανούς πελάτες/γιατρούς που προέρχονται από διάφορες κλινικές, νοσοκομεία ή/και άλλα ιατρικά κέντρα της Κύπρου. Επειδή ο αριθμός των διαθέσιμων ρομπότ για το σεμινάριο είναι περιορισμένος και ίσος με  $k$ , πρέπει να επιλέξετε προσεκτικά τους γιατρούς τους οποίους θα προσκαλέσετε στο σεμινάριο. Συγκεκριμένα, θεωρήστε ότι σας δίνεται ο αριθμός των ρομπότ,  $k$ , και ένα σύνολο της μορφής  $\Sigma = \{(\gamma_1, \kappa_1), (\gamma_2, \kappa_2), \dots, (\gamma_n, \kappa_n)\}$ , όπου για κάθε γιατρό  $\gamma$  ο οποίος εργάζεται στο ιατρικό κέντρο  $\kappa$ , το σύνολο  $\Sigma$  περιέχει το ζεύγος  $(\gamma, \kappa)$ . Σημειώστε ότι ένας γιατρός είναι δυνατό να συνεργάζεται με περισσότερα από ένα ιατρικά κέντρα, έτσι είναι δυνατό να ισχύει  $(\gamma, \kappa), (\gamma, \kappa') \in \Sigma$ , όπου  $\kappa \neq \kappa'$ . Καλείστε να επιλέξετε τους γιατρούς που θα προσκληθούν στο σεμινάριο έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα πιο κάτω κριτήρια:

1. Ο αριθμός των γιατρών δεν θα πρέπει να ξεπερνά το  $k$ .
2. Για κάθε ιατρικό κέντρο, θα πρέπει να προσκληθεί τουλάχιστον ένας γιατρός που συνεργάζεται με αυτό.

(α) Να δείξετε ότι το πρόβλημα ανήκει στην κλάση NP.

(β) Να δείξετε ότι το πρόβλημα είναι NP-πλήρες μέσω αναγωγής από γνωστό NP-πλήρες πρόβλημα.

**Άσκηση 5 [Bonus: 20 μονάδες]**

Να δείξετε ότι οι πιο κάτω γλώσσα είναι διαγνώσιμη.

$\{ \langle M, w \rangle \mid \eta \text{ } M \text{ είναι μια TM και } \eta \text{ } w \text{ μια λέξη έτσι ώστε } \eta \text{ } M \text{ εκτελούμενη στο } w \text{ θα επιχειρήσει να κινήσει την κεφαλή της αριστερά σε κάποιο σημείο του υπολογισμού της} \}$