ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΕΠΛ 211: Θεωρία Υπολογισμού

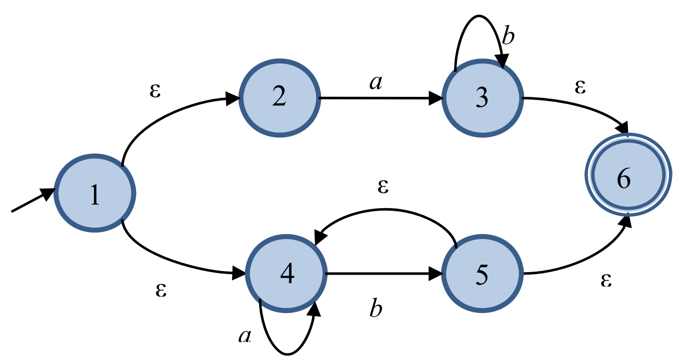
Ενδιάμεση Εξέταση

Ημερομηνία : Πέμπτη, 14 Μαρτίου 2019
Διάρκεια : 09.00 – 10.30
Διδάσκουσα : Άννα Φιλίππου

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

<u>Πρόβλημα 1</u> [35 μονάδες]

(α) **[7 μονάδες]** Θεωρήστε το πιο κάτω μη ντετερμινιστικό αυτόματο.



Να παρουσιάσετε το αυτόματο με τον τυπικό του ορισμό θεωρώντας ότι το αλφάβητό του είναι το σύνολο $\{a,b\}$. Να δείξετε ότι το αυτόματο αποδέχεται τη λέξη *baabb* παρουσιάζοντας τη σχετική ακολουθία καταστάσεων που οδηγεί σε αποδοχή.

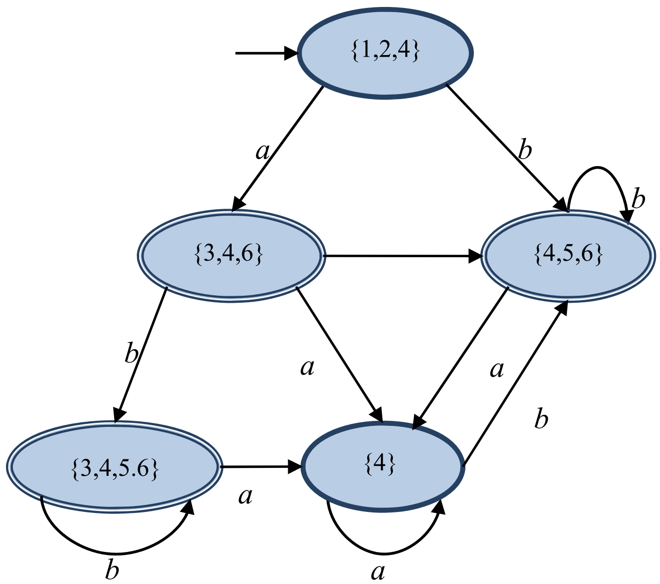
Τυπικός ορισμός αυτομάτου: (Q, Σ, δ, q_{init}, F) όπου
- $Q = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\Sigma = \{a, b\}$
- δ όπως τον πίνακα που ακολουθεί

δ	***a***	***b***	**ε**
1	{}	{}	{2,4}
2	{3}	{}	{}
3	{}	{3}	{6}
4	{4}	{5}	{6}
5	{}	{}	{4,6}
6	{}	{}	{}

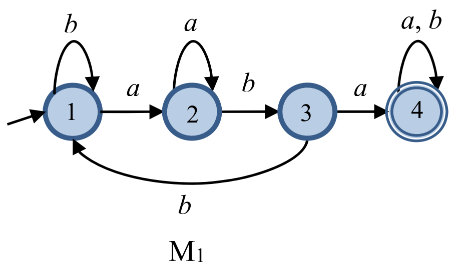
- $q_{init} = 1$
- $F = \{6\}$

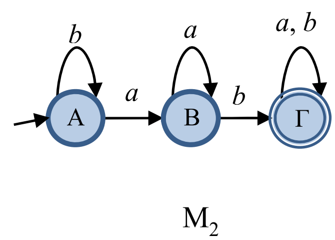
Το αυτόματο αποδέχεται τη λέξη *baabb* ως εξής: $1 \xrightarrow{\varepsilon} 4 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{\varepsilon} 4 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{a} 4 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{\varepsilon} 4 \xrightarrow{b} 5 \xrightarrow{\varepsilon} 6$

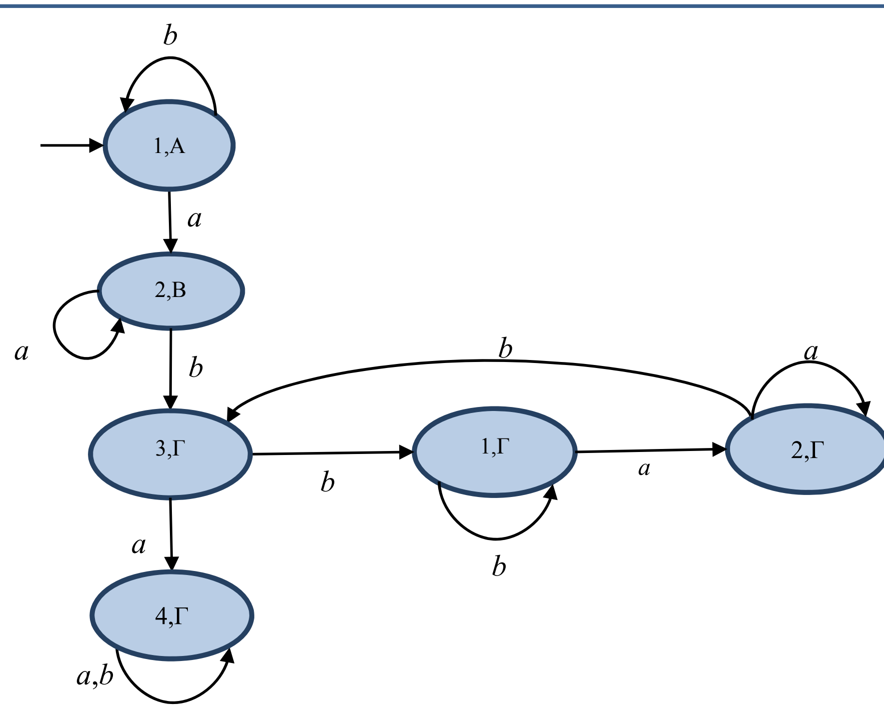
(β) **[13 μονάδες]** Να μετατρέψετε το NFA αυτόματο από το μέρος (α) σε ένα ισοδύναμο ντετερμινιστικό αυτόματο (DFA) χρησιμοποιώντας την κατασκευή που μελετήσαμε στο μάθημα.



(γ) **[12 μονάδες]** Να κατασκευάσετε αυτόματο που να αποδέχεται τη γλώσσα A – B όπου *A* η γλώσσα του αυτομάτου M_1 και B η γλώσσα του αυτομάτου M_2, τα οποία φαίνονται πιο κάτω.







(δ) **[3 μονάδες]** Με βάση το αυτόματο που κατασκευάσατε στο σκέλος (γ), να αποφασίσετε κατά πόσο οι γλώσσες A και B ικανοποιούν τη σχέση $A \subseteq B$.

Παρατηρούμε ότι το αυτόματο που κατασκευάσαμε στο σκέλος (γ) δεν διαθέτει καμιά τελική κατάσταση. Αυτό συνεπάγεται ότι η γλώσσα A – B, δηλαδή,δεν υπάρχει καμιά λέξη που να ανήκει στο A και να μην ανήκει στο B. Επομένως, $A \subseteq B$.

<u>Πρόβλημα 2</u> [45 μονάδες]

Θεωρήστε τη γλώσσα

$$L = \{ x\#yx^Rz \mid x, y \in \{a,b\}^* \text{ και } z \in \{a,b\}^+ \}$$

Για παράδειγμα, οι λέξεις <u>*abb*</u>#*a*<u>*bba*</u>*a*, και <u>*aa*</u>#<u>*aa*</u>*ba* ανήκουν στη γλώσσα, ενώ οι λέξεις #*aa*#*aa*, *aa*#*aa* και *ab*#*bba* δεν ανήκουν στη γλώσσα.

[Υπενθύμιση: Για κάθε λέξη $w = a_1a_2\ldots a_n$, η λέξη w^R είναι η λέξη που προκύπτει όταν αναστρέψουμε τη σειρά των συμβόλων της, δηλαδή, $w^R = a_n\ldots a_2a_1$.]

(α) **[15 μονάδες]** Να αποδείξετε ότι η γλώσσα *L* *δεν* είναι κανονική συμπληρώνοντας κατάλληλα τα κενά στην πιο κάτω ελλιπή απόδειξη:

Υποθέτουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι η *L* είναι κανονική. Από το Λήμμα της Άντλησης για Κανονικές Γλώσσες, συνεπάγεται ότι υπάρχει ακέραιος *p*, το μήκος άντλησης της γλώσσας, τέτοιος ώστε κάθε λέξη $w \in L$, με μήκος $|w| \geq p$, μπορεί να γραφτεί ως $w = xyz$ έτσι ώστε (i) $|xy| \leq p$, (ii) $|y| > 0$ και (iii) για κάθε ακέραιο $i \geq 0$, η λέξη $xy^iz \in L$.

Επιλέγουμε τη λέξη w = **<u>$a^p\#a^p b$</u>** .

Προφανώς $|w|$ = **<u>2p+2</u>** $\geq p$.

Από τις συνθήκες (i) και (ii) έπεται ότι

x = **<u>$a^κ$</u>** ,

y = **<u>$a^λ$</u>**,

z = **<u>$a^μ\#a^p b$</u>** ,

όπου **<u>κ+λ+μ=p και λ>0</u>** .

Επιλέγουμε i = <u>2</u> .

Τότε xy^iz = **<u>$a^{p+λ}\#a^p b$</u>** .

Παρατηρούμε ότι **<u>η λέξη αυτή δεν έχει τη μορφή *x#yx^Rz*, αφού θα έπρεπε $x = a^{p+λ}$ και $x^R = a^{p+λ}$, κάτι που προφανώς δεν ισχύει αφού οι λέξεις $a^{p+λ}$ και a^p έχουν διαφορετικό μήκος.</u>**

Αυτό μας οδηγεί σε αντίφαση και επομένως η γλώσσα *L* είναι μη κανονική.

(β) **[15 μονάδες]** Να αποδείξετε ότι η γλώσσα L είναι ασυμφραστική επιδεικνύοντας ασυμφραστική γραμματική που να την παράγει. Να εξηγήσετε τη λειτουργία της γραμματικής σας άτυπα αλλά με σαφήνεια.

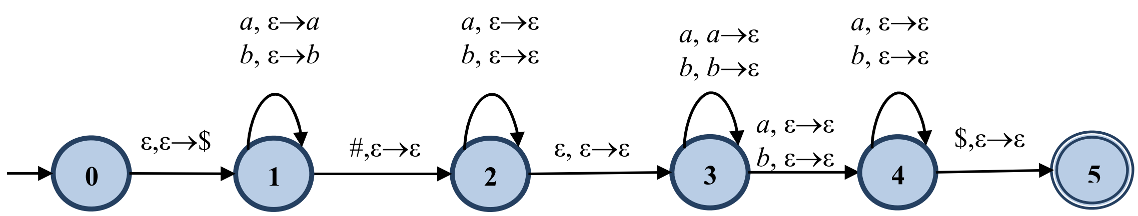
Μια γραμματική για τη γλώσσα έχει ως εξής:

$$S \to WZ$$
$$Z \to aZ \mid bZ \mid a \mid b$$
$$W \to aWa \mid bWb \mid R$$
$$R \to \#Y$$
$$Y \to aY \mid bY \mid \varepsilon$$

Η γραμματική διαχωρίζει τη δημιουργία των λέξεων στα τμήματα $x\#yx^R$ (μεταβλητή W) και z (μεταβλητή Z). Με τη σειρά της, η μεταβλητή W «κτίζει» λέξεις από έξω προς τα μέσα τοποθετώντας ζευγάρια όμοιων συμβόλων από τα δύο άκρα της λέξης προς το κέντρο (δύο πρώτοι κανόνες). Με αυτό τον τρόπο διασφαλίζεται ότι η λέξη στο δεύτερο μισό θα είναι η ανάστροφη της λέξης στο πρώτο μισό. Στη συνέχεια (τρίτος κανόνας W), η δημιουργία της λέξης ανατίθεται στη μεταβλητή R, η οποία τοποθετεί το σύμβολο # και, τέλος, δεξιά από αυτό, μέσω της μεταβλητής Y δημιουργείται η λέξη y.

(γ) **[15 μονάδες]** Να αποδείξετε ότι η γλώσσα L είναι ασυμφραστική επιδεικνύοντας ένα αυτόματο στοίβας που να την αναγνωρίζει.

Να κτίσετε το αυτόματο κατευθείαν και όχι μέσω μετατροπής της ασυμφραστικής γραμματικής από το σκέλος (β).



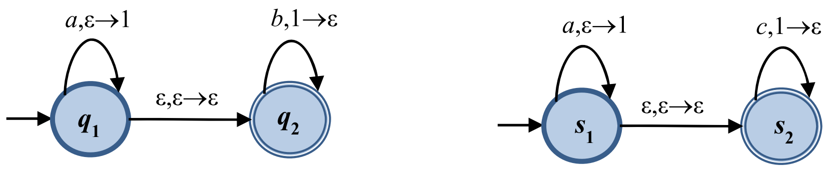
Το πιο πάνω αυτόματο, αφού τοποθετήσει το σύμβολο $ στη στοίβα έτσι ώστε να αναγνωρίζει τον πάτο της, στην κατάσταση 1 διαβάζει μια λέξη (το τμήμα x στον ορισμό της γλώσσας) και την καταγράφει στη στοίβα. Στη συνέχεια, αφού διαβάσει το σύμβολο #, στην κατάσταση 2 διαβάζει μια ακολουθία συμβόλων που αντιστοιχεί στο τμήμα y στον ορισμό της γλώσσας. Από την κατάσταση 3 επιχειρεί να διαβάσει το τμήμα x^R αναμένοντας κάθε σύμβολο που διαβάζει να συμπίπτει με το στοιχείο κορυφής της στοίβας το οποίο και ανασύρει. Τέλος, κατά τη μετάβαση 3→4 καθώς και τον κύκλο 4→4, το αυτόματο διαβάζει το τμήμα z της λέξης, το οποίο οφείλει να περιέχει τουλάχιστον ένα σύμβολο. Αν η στοίβα έχει αδειάσει, το αυτόματο είναι σε θέση να αποδεχθεί τη λέξη εισόδου.

<u>Πρόβλημα 3</u> [20 μονάδες]

Έστω δύο γλώσσες A και B. Όπως γνωρίζουμε, η συναρμογή των δύο γλωσσών, AB, ορίζεται ως η πιο κάτω γλώσσα:

$$AB = \{ xy \mid x \in A, y \in B \}$$

(α) Θεωρήστε τα πιο κάτω αυτόματα στοίβας P_1 και P_2.



P_1 P_2

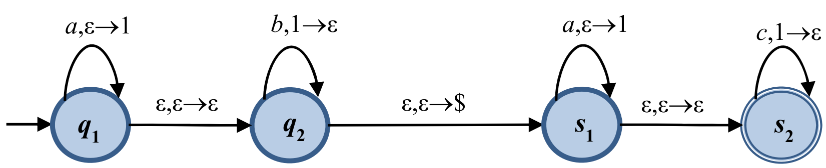
(i) **[4 μονάδες]** Να περιγράψετε με σαφήνεια τη γλώσσα του κάθε αυτομάτου.

Γλώσσα του P_1: $\{ a^m b^n \mid m \geq n \}$

Γλώσσα του P_2: $\{ a^m c^n \mid m \geq n \}$

(ii) **[8 μονάδες]** Συνδυάζοντας κατάλληλα τα αυτόματα στοίβας P_1 και P_2, να παρουσιάσετε αυτόματο στοίβας P το οποίο να αποδέχεται τη γλώσσα L_1L_2, όπου L_1 η γλώσσα του αυτομάτου P_1 και L_2 η γλώσσα του αυτομάτου P_2.

Ακολουθεί μια πρόταση για το ζητούμενο αυτόματο.



Παρατηρούμε ότι το προτεινόμενο αυτόματο αποτελεί τη σύνθεση των επιμέρους αυτομάτων με ένωση της τελικής κατάστασης του πρώτου (η οποία παύει να είναι τελική) με την αρχική κατάσταση του δεύτερου. Το σημείο που πρέπει να χειριστούμε κατά τη δημιουργία της συναρμογής έχει να κάνει με τη στοίβα, η οποία χρησιμοποιείται και από τα δύο αυτόματα και είναι δυνατόν στοιχεία που θα παραμείνουν στη στοίβα κατά την επεξεργασία του πρώτου αυτομάτου να ανασυρθούν κατά την επεξεργασία του δεύτερου. Για αποφυγή αυτού του φαινομένου μπορούμε π.χ. (1) να αδειάσουμε τη στοίβα πριν από την εκτέλεση του δεύτερου αυτομάτου, (2) να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό αλφάβητο στοίβας κατά την επεξεργασία κάθε αυτομάτου, ή, (3) όπως φαίνεται στην πιο πάνω λύση, να τοποθετήσουμε ένα σύμβολο μετά από την ολοκλήρωση της εκτέλεσης του πρώτου αυτομάτου, έτσι ώστε διαχωρίσουμε τα σύμβολα που θα απομείνουν από την εκτέλεση του πρώτου αυτομάτου, από αυτά που θα εγγραφούν κατά την εκτέλεση του δεύτερου.

(β) **[8 μονάδες]** *Γενικεύστε τις παρατηρήσεις σας από το μέρος (α)* για να επιχειρηματολογήσετε ότι αν δύο γλώσσες A και B είναι ασυμφραστικές τότε η γλώσσα AB είναι ασυμφραστική.

Έστω ασυμφραστικές γλώσσες A και B. Από την ασυμφραστικότητα των γλωσσών, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αυτόματα στοίβας που τις αναγνωρίζουν. Έστω $M_1 = (Q_1, \Sigma, \Gamma_1, \delta_1, q_1, F_1)$ ένα PDA αυτόματο που αναγνωρίζει τη γλώσσα A και $M_2 = (Q_2, \Sigma, \Gamma_2, \delta_2, q_2, F_2)$ ένα PDA αυτόματο που αναγνωρίζει τη γλώσσα B. Θα δείξουμε ότι υπάρχει αυτόματο στοίβας που αναγνωρίζει τη γλώσσα AB. Το αυτόματο αυτό είναι το αυτόματο $P = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma, \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\$\}, \delta, q_1, F_2)$, όπου θεωρούμε ότι το \$ είναι ένα σύμβολο που δεν ανήκει στα αλφάβητα στοίβας των δύο αυτομάτων και όπου

$$\delta(q,x,y) = \begin{cases} \delta_1(q,x,y) & \alpha\nu\ q \in Q_1 - F_1 \\ \delta_1(q,x,y) & \alpha\nu\ q \in F_1, x \neq \varepsilon \text{ ή } y \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,x,y) \cup \{(q_2,\$)\} & \alpha\nu\ q \in F_1, x = y = \varepsilon \\ \delta_2(q,x,y) & \alpha\nu\ q \in Q_2 \end{cases}$$

Με λόγια, το αυτόματο συνδυάζει σειριακά τα δύο αυτόματα με την προσθήκη μιας μετάβασης από τις τελικές καταστάσεις του πρώτου αυτομάτου προς την αρχική κατάσταση του δεύτερου αυτομάτου κατά την οποία γράφει το σύμβολο \$ στη στοίβα.

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το PDA P αποδέχεται μια λέξη w αν και μόνο αν $w \in AB$:

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $w \in L(P)$. Τότε η w μπορεί να γραφτεί στη μορφή $w = w_1 w_2 \ldots w_m$ όπου κάθε $w_i \in \Sigma_\varepsilon$, και υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \ldots, r_m \in Q_1 \cup Q_2$ και ακολουθία λέξεων (στοίβες) $s_0, s_1, \ldots, s_m \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\$\})^*$ που να ικανοποιούν τις συνθήκες:

- $r_0 = q_1$ και $s_0 = \varepsilon$
- Για κάθε $i = 0, \ldots, m-1$, $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, όπου $s_i = at$ και $s_{i+1} = bt$ για κάποια $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ και $t \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\$\})^*$, και
- $r_m \in F_2$

Τότε, από τον ορισμό του P, $r_1, \ldots, r_k \in Q_1$, $r_{k+1}, \ldots, r_m \in Q_2$, r_1 η αρχική κατάσταση του αυτόματου M_1 και $r_k \in F_1$, r_{k+1} η αρχική κατάσταση του αυτόματου M_2 και $r_m \in F_2$. Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$w_1 w_2 \ldots w_k \in L(A) \qquad (1)$$

Επιπρόσθετα παρατηρούμε ότι $s_{k+1} = \$s_k$ και αφού το σύμβολο \$ δεν ανήκει στο αλφάβητου στοίβας του M_2, για κάθε στοίβα s_m με $m > k+1$, $s_m = u_m\$s_k$. Αυτό συνεπάγεται ότι για $r_{k+1}, \ldots, r_m \in Q_2$, και ακολουθία λέξεων $u_{k+1}, \ldots, u_m \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\$\})^*$ ικανοποιούνται οι συνθήκες:

- $r_{k+1} = q_2$ και $u_{k+1} = \varepsilon$
- Για κάθε $i = k+1, \ldots, m-1$, $(r_{i+1}, b) \in \delta(r_i, w_{i+1}, a)$, όπου $u_i = at$ και $u_{i+1} = bt$ για κάποια $a, b \in \Gamma_\varepsilon$ και $t \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{\$\})^*$, και
- $r_m \in F_2$

Επομένως

$$w_{k+1} \ldots w_m \in L(B) \qquad (2)$$

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $w \in AB$.

Η αντίθετη κατεύθυνση, σύμφωνα με την οποία αν $w \in AB$ τότε $w \in L(P)$ ακολουθεί όμοια επιχειρήματα.