

Φροντιστήριο 1 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, για κάθε άρτιο αριθμό n μεγαλύτερο από 2, υπάρχει 3-κανονικό (κάθε κόμβος έχει βαθμό 3) μη κατευθυνόμενο γράφημα με n κόμβους.

Λύση

Έστω n αυθαίρετος άρτιος αριθμός, $n \geq 4$. Αφού ο n είναι άρτιος, μπορούμε να τον γράψουμε ως $n = 2k$. Κατασκευάζουμε γράφημα $G = (V, E)$ με n κόμβους ως εξής:

$$V = \{1, 2, 3, \dots, 2k\}$$

$$E = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (2k-1, k), (2k, 1)\} \cup \{(i, k+i) \mid 1 \leq i \leq k\}$$

Στο γράφημα αυτό οι κόμβοι έχουν τοποθετηθεί διαδοχικά κατά μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου και επιπλέον συνδέθηκαν μέσω «ακτίνων» με τους αντιδιαμετρικούς τους κόμβους. Προφανώς, το γράφημα είναι 3-κανονικό αφού κάθε κόμβος συνδέεται με τον προηγούμενο του κόμβο, τον επόμενο του κόμβο και τον κόμβο που βρίσκεται απέναντί του.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

Ξεκινούμε αποδεικνύοντας το πιο κάτω βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα: Για κάθε ζεύγος περιττών ακέραιων m και n το γινόμενο mn είναι περιττό.

Απόδειξη: Αφού οι δύο αριθμοί είναι περιττοί μπορούν να γραφτούν ως $m = 2a + 1$ και $n = 2b + 1$. Άρα

$$m \cdot n = (2a + 1)(2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1$$

Επομένως το γινόμενο αυτό είναι περιττό.

Επιστρέφουμε στο ζητούμενο της άσκησης. Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθέσουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε, υπάρχουν ακέραιοι X και Y τέτοιοι ώστε $\sqrt{2} = \frac{X}{Y}$. Έστω x και y οι ακέραιοι που προκύπτουν από τους X και Y μετά από όλες τις απλοποιήσεις που δυνατόν να είναι εφικτές στον λόγο $\frac{X}{Y}$. Προφανώς ισχύει και πάλι ότι $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$ και επιπλέον

$$\sqrt{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow 2 = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow 2y^2 = x^2 \quad (*)$$

Επομένως ο αριθμός x^2 είναι άρτιος. Αυτό συνεπάγεται ότι και ο x είναι άρτιος. (Διότι αν ήταν περιττός τότε, από το Λήμμα πιο πάνω, και ο x^2 θα ήταν περιττός). Κατά συνέπεια, ο

x μπορεί να γραφτεί ως $x = 2k$ όπου k κάποιος ακέραιος. Αντικαθιστώντας στην ισότητα (*), παίρνουμε

$$2y^2 = x^2 \Rightarrow 2y^2 = 4k^2 \Rightarrow y^2 = 2k^2$$

Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο y^2 είναι άρτιος. Όπως και πιο πάνω, ισχύει ότι και ο y είναι άρτιος.

Άρα οι αριθμοί x και y είναι άρτιοι που σημαίνει ότι έχουν κοινό παράγοντα τον αριθμό 2. Αυτό όμως μας οδηγεί σε άτοπο αφού υποθέσαμε ότι οι δύο αριθμοί δεν έχουν κοινούς παράγοντες.

Κατά συνέπεια, η αρχική μας υπόθεση ήταν λανθασμένη και το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Άσκηση 3

Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, ο αριθμός $\phi(n) = 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Λύση

Απόδειξη με επαγωγή στο n .

Βασική Περίπτωση: Για $n=0$ έχουμε $\phi(0) = 4^{2 \cdot 0 + 1} + 3^{2 \cdot 0 + 1} = 4 + 3 = 7$. Επομένως το $\phi(0)$ είναι πολλαπλάσιο του 7 και το ζητούμενο έπεται.

Υπόθεση της Επαγωγής: Υποθέτουμε ότι για τον ακέραιο k ο αριθμός $\phi(k) = 4^{2k+1} + 3^{2k+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Έστω $\phi(k) = 4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 7a$ για κάποιο ακέραιο a .

Βήμα της Επαγωγής: Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\phi(k+1)$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \phi(k+1) &= 4^{2(k+1)+1} + 3^{2(k+1)+1} = 4^{2k+3} + 3^{2k+3} = 4^2 \cdot 4^{2k+1} + 3^2 \cdot 3^{2k+1} \\ &= (9+7) \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot 3^{2k+1} = 7 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot 3^{2k+1} \\ &= 7 \cdot 4^{2k+1} + 9(4^{2k+1} + 3^{2k+1}) = 7 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot \phi(k) \\ &= \{\text{Υπόθεση της Επαγωγής}\} \\ &\quad 7 \cdot 4^{2k+1} + 9 \cdot 7a \\ &= 7(4^{2k+1} + 9a) \end{aligned}$$

Επομένως ο $\phi(k+1)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Άσκηση 4

Υποθέστε ότι το σύνολο L είναι το μικρότερο σύνολο επί του αλφαβήτου $\{0,1\}$ τα στοιχεία του οποίου παράγονται από τους πιο κάτω κανόνες:

- (1) $\varepsilon \in L$
- (2) Αν $u \in L$ τότε $0u1 \in L$

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \geq 0$, η λέξη $0^n 1^n \in L$.

(β) Να αποδείξετε ότι για κάθε λέξη $w \in L$ ισχύει ότι $w = 0^k 1^k$ για κάποιο $k \geq 0$.

Λύση

(α) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή πάνω στο n .

Βάση της Επαγωγής: Αν $n = 0$, τότε $0^0 1^0 = \epsilon$. Από τον κανόνα (1), η λέξη ϵ ανήκει στη γλώσσα και το ζητούμενο έπεται.

Επαγωγική Υπόθεση: Ας υποθέσουμε ότι η λέξη $0^k 1^k \in L$.

Επαγωγικό Βήμα Πρέπει να δείξουμε ότι η λέξη $0^{k+1} 1^{k+1} \in L$. Με βάση την υπόθεση της επαγωγής $0^k 1^k \in L$. Επομένως, από τον κανόνα (2) έχουμε ότι $00^k 1^k 1 \in L$. Επομένως $0^{k+1} 1^{k+1} \in L$ και το ζητούμενο έπεται.

(β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε λέξη $w \in L$, ισχύει ότι $w = 0^k 1^k$ για κάποιο $k \geq 0$.

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή πάνω στο n , το πλήθος των κανόνων που απαιτήθηκαν για την κατασκευή της w .

Βάση της Επαγωγής: Αν $n = 1$, τότε χρησιμοποιήθηκε μόνο ένας κανόνας. Ο κανόνας αυτός πρέπει να είναι ο πρώτος κανόνας και η λέξη πρέπει να είναι η ϵ . Αφού $\epsilon = 0^0 1^0$, το ζητούμενο έπεται.

Επαγωγική Υπόθεση: Ας υποθέσουμε ότι οποιαδήποτε λέξη έχει παραχθεί με τη χρήση m κανόνων έχει τη μορφή $0^k 1^k$ για κάποιο $k \geq 0$.

Επαγωγικό Βήμα Πρέπει να δείξουμε ότι αν μια λέξη έχει παραχθεί με τη χρήση $m+1$ κανόνων έχει τη μορφή $0^p 1^p$ για κάποιο $p \geq 0$. Από την υπόθεση της επαγωγής, μετά από την εφαρμογή των m πρώτων κανόνων η λέξη έχει τη μορφή $0^k 1^k$. Αν εφαρμόσουμε ακόμα ένα κανόνα, τότε ο κανόνας αυτό πρέπει να είναι ο κανόνας (2) Επομένως, η λέξη που θα παραχθεί θα είναι η $00^k 1^k 1 = 0^{k+1} 1^{k+1} \in L$ και το ζητούμενο έπεται.