
Θεωρία Υπολογισμού και Πολυπλοκότητα

Ασυμφραστικές Γλώσσες (3)

Στην ενότητα αυτή θα μελετηθούν τα εξής επιμέρους θέματα:

Μη Ασυμφραστικές Γλώσσες (2.3)

- *Λήμμα Άντλησης για Ασυμφραστικές Γλώσσες*
- *Παραδείγματα*

Πότε μια γλώσσα δεν είναι ασυμφραστική;

- Θεωρήστε τη γλώσσα

$$B = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$$

- **Ερώτημα:** Υπάρχει ασυμφραστική γραμματική ή αυτόματο στοίβας που να την αναγνωρίζει;
- **ΟΧΙ**
 - Με τη στοίβα μπορούμε να συσχετίσουμε τις εμφανίσεις του b με το a αλλά δεν θα μείνουν σύμβολα στη στοίβα για να μετρήσουμε για το c .
- Δεν μπορούμε να κάνουμε περισσότερους από ένα συσχετισμούς σε μια ασυμφραστική γραμματική.

Λήμμα της Άντλησης

- Πως αποδεικνύουμε ότι μια γλώσσα ΔΕΝ είναι ασυμφραστική;
 - ΛΗΜΜΑ ΑΝΤΛΗΣΗΣ
- Λήμμα Άντλησης: Όλες οι λέξεις μιας ασυμφραστικής γλώσσας που έχουν μήκος μεγαλύτερο ή ίσο κάποιας συγκεκριμένης τιμής, η οποία ονομάζεται *μήκος άντλησης*, επιδέχονται μια διαδικασία «άντλησης».
 - Κάθε τέτοια λέξη περιλαμβάνει *πέντε* τμήματα *δύο* από τα οποία να μπορούν να επαναληφθούν *ταυτόχρονα* και η προκύπτουσα λέξη να ανήκει στη γλώσσα.

Λήμμα της Άντλησης

Λήμμα της Άντλησης για ασυμφραστικές γλώσσες

Για κάθε ασυμφραστική γλώσσα A , υπάρχει αριθμός p (το *μήκος άντλησης* αυτής) τέτοιος ώστε κάθε λέξη w της A με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο του p να μπορεί να χωριστεί σε πέντε τμήματα, $w = uvxyz$, που να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες:

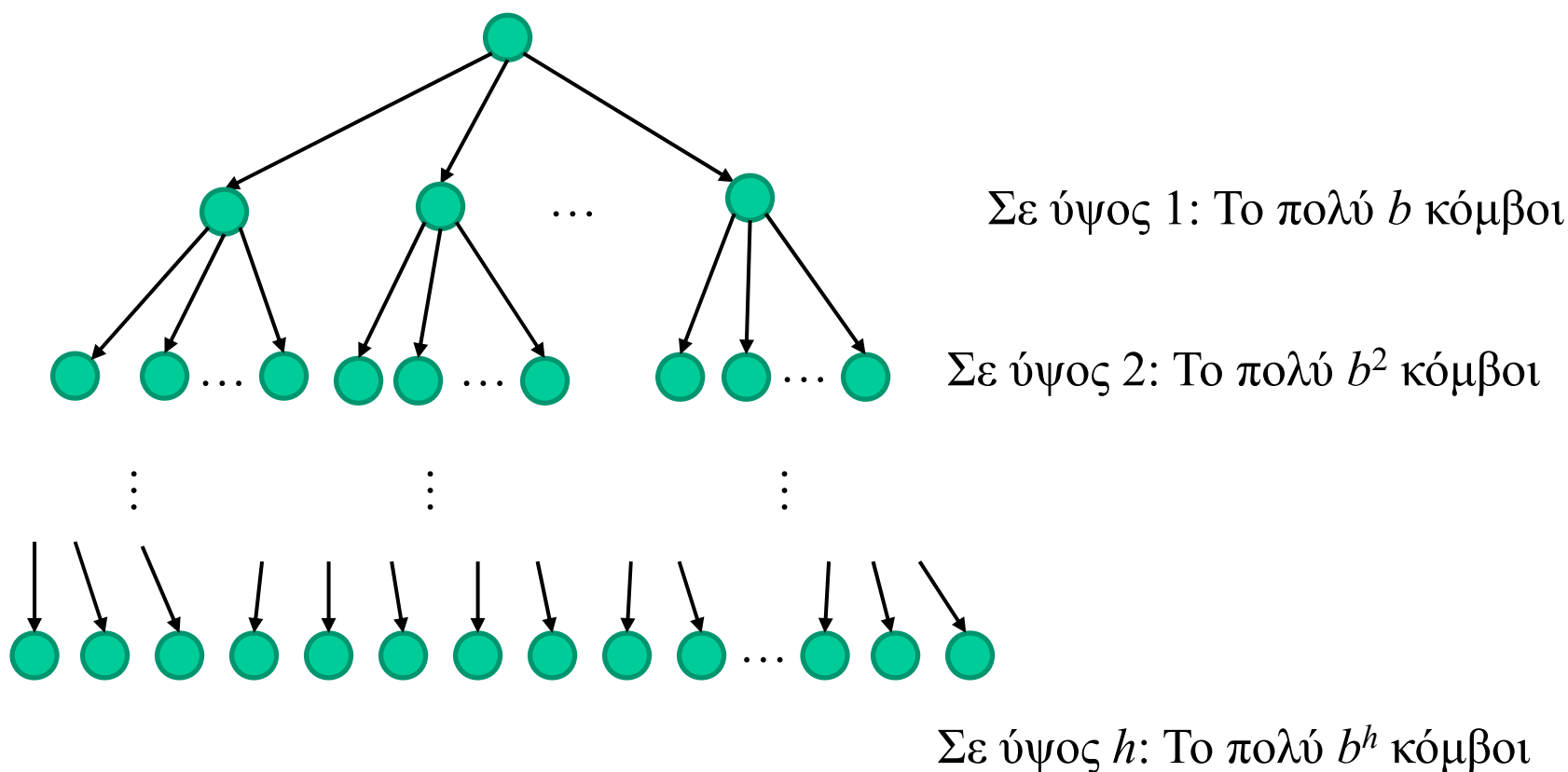
1. Για κάθε $i \geq 0$, $uv^i xy^i z \in A$
2. $|vy| > 0$, και
3. $|vxy| \leq p$.

Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Έστω G μια ασυμφραστική γραμματική που παράγει τη γλώσσα A .
- Θέλουμε να δείξουμε ότι:
 - Κάθε λέξη της A με μήκος μεγαλύτερο ή ίσο κάποιας τιμής p μπορεί να χωριστεί σε πέντε μέρη $uvxyz$ που να ικανοποιούν τις συνθήκες του λήμματος
- Η ποσότητα p εξαρτάται από δύο παραμέτρους της γραμματικής:
 1. Έστω b το μέγιστο πλήθος συμβόλων στο δεξί μέλος κάθε κανόνα της G
 2. Έστω $|V|$ το πλήθος των μεταβλητών της γραμματικής.
- Θεωρούμε ότι $b \geq 2$.

Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Σε οποιοδήποτε συντακτικό δέντρο της G κάθε κόμβος έχει το πολύ b θυγατρικούς κόμβους.

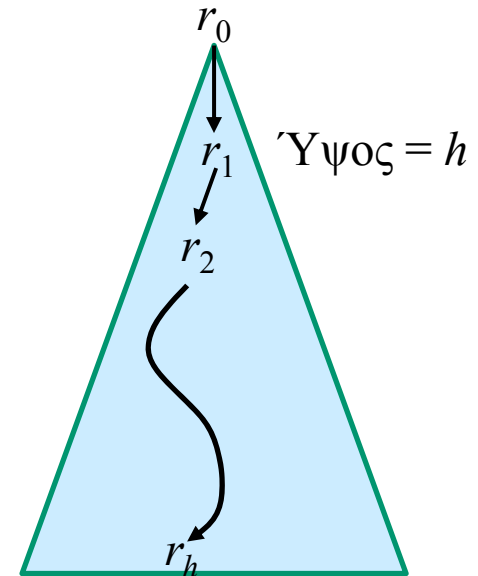


Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Επομένως:
 - Σε απόσταση 1 από την εναρκτήρια μεταβλητή \Rightarrow το πολύ b κόμβοι
 - Σε απόσταση 2 από την εναρκτήρια μεταβλητή \Rightarrow το πολύ b^2 κόμβοι
 - ...
 - Σε απόσταση h από την εναρκτήρια μεταβλητή \Rightarrow το πολύ b^h κόμβοι
 - Αν το ύψος του συντακτικού δέντρου $\leq h \Rightarrow$ Μήκος της παραγόμενης λέξης $\leq b^h$
- Αντίστροφα, αν το μήκος της λέξης είναι $\geq b^{h+1}$, τότε
 - Το ύψος κάθε δέντρου που παράγει τη λέξη είναι $\geq h+1$

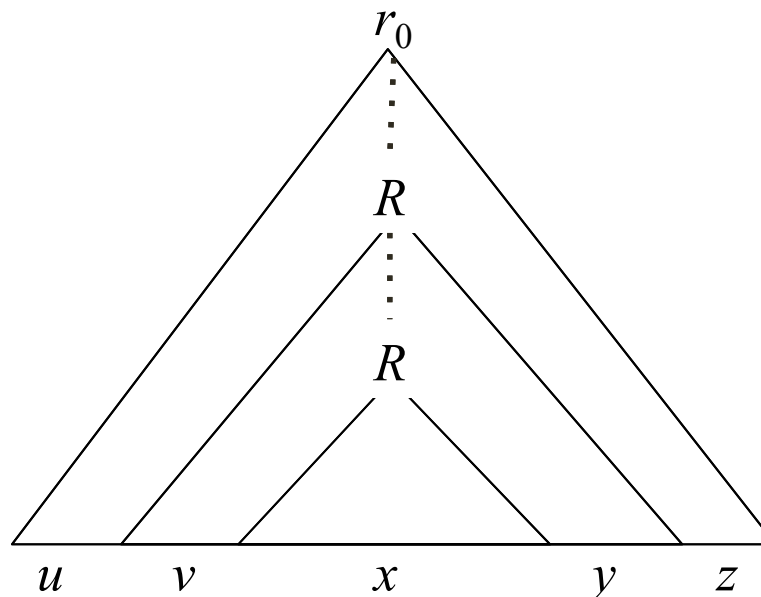
Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Επιλέγουμε ως **μήκος άντλησης** την τιμή $p = b^{|\mathcal{V}|+1}$
 - b : το μέγιστο πλήθος συμβόλων στο δεξί μέλος κάθε κανόνα της G
 - $|\mathcal{V}|$: το πλήθος μεταβλητών της G
- Υποθέτουμε ότι έχουμε μια λέξη $s \in A$ τ.ω. $|s| \geq p$. Τότε
 - Κάθε συντακτικό δέντρο της s έχει ύψος $h \geq |\mathcal{V}|+1$
- Έστω Δ ένα **ελάχιστο** συντακτικό δέντρο που παράγει την s
 - Έστω h το ύψος του $\Delta \Rightarrow$ το δέντρο περιέχει κάποια διαδρομή μήκους $h+1$ από τη ρίζα στα φύλλα
- Αφού $h \geq |\mathcal{V}|+1$ στη διαδρομή εμφανίζονται τουλάχιστον $|\mathcal{V}|+2$ κόμβοι:
 - ένα τερματικό σύμβολο (το r_h) και
 - τουλάχιστον $|\mathcal{V}|+1$ μεταβλητές



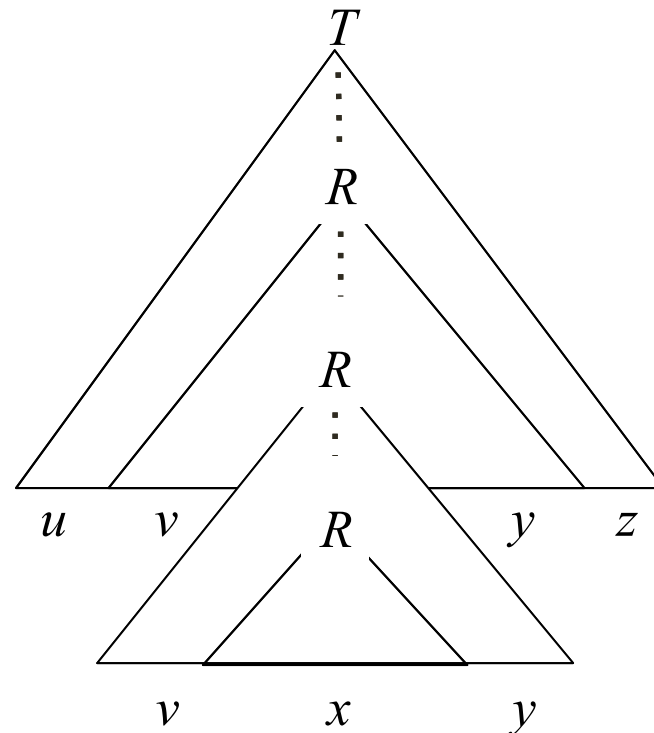
Απόδειξη Λήμματος Άντλησης

- Άρα στην διαδρομή περιέχονται $|V|+1$ μεταβλητές
- Αφού η G περιέχει $|V|$ μεταβλητές
 - Αρχή του Περιστερώνα: Υπάρχει μια μεταβλητή που εμφανίζεται περισσότερες από μια φορές στη διαδρομή
- Επιλέγουμε ως R μια μεταβλητή που επαναλαμβάνεται και βρίσκεται στους $|V|+1$ χαμηλότερους κόμβους.
- Μπορούμε να χωρίσουμε την s σε πέντε μέρη $uvxyz$:



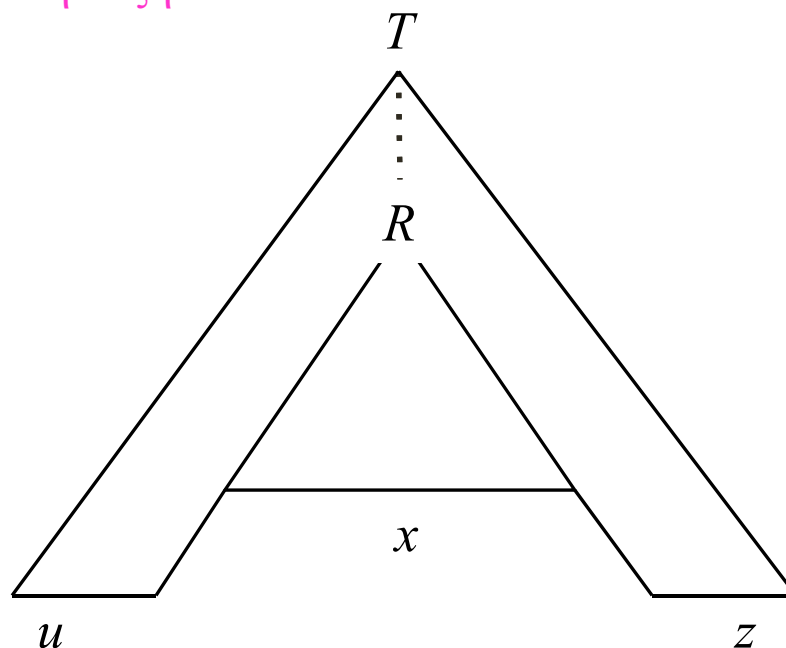
Απόδειξη Συνθήκης 1

- Αφού τα δύο υποδέντρα προκύπτουν από την ίδια μεταβλητή μπορούμε να αντικαταστήσουμε το ένα με το άλλο
- Αντικαθιστώντας το μικρό με το μεγάλο υποδέντρο
 - Παίρνουμε τη λέξη uv^2xy^2z



Απόδειξη Συνθήκης 1

- Αντικαθιστώντας το μικρό δένδρο με το μεγάλο κατ'επανάληψη
 - Παίρνουμε τις λέξεις uv^ixy^iz
- Αντικαθιστώντας το μεγάλο με το μικρό υποδένδρο
 - Παίρνουμε τη λέξη uxz



Απόδειξη Συνθηκών 2 και 3

- **Συνθήκη 2:** $|vy| > 0$
 - Οι λέξεις v και y δεν είναι ταυτόχρονα κενές
 - Αν και οι δύο ήταν κενές τότε αντικαθιστώντας το μεγάλο με το μικρό υποδέντρο το δέντρο θα παράγαγε την s αλλά θα είχε λιγότερους κόμβους από το Δ

Αδύνατον αφού επιλέξαμε ένα ελάχιστο δέντρο για την s
- **Συνθήκη 3:** $|vxy| \leq p$
 - Η vxy παράγεται από το ψηλότερο R
 - Οι δυο εμφανίσεις τις R εμφανίζονται στις χαμηλότερες $|V|+1$ μεταβλητές
 - Άρα το υποδέντρο στο οποίο η R παράγει την vxy έχει ύψος το πολύ $|V|+1$
 - Επομένως, η λέξη vxy έχει μήκος το πολύ $b^{|V|+1} = p$.
- Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Απόδειξη Μη Ασυμφραστικότητας

- Δοθείσας μιας γλώσσας B πώς δείχνουμε ότι δεν είναι ασυμφραστική;
- Βήμα 1:
 - Υποθέτουμε (για να φτάσουμε σε αντίφαση) ότι η B είναι ασυμφραστική
- Βήμα 2:
 - Θεωρούμε ότι η B περιέχει λέξεις μήκους μεγαλύτερο ή ίσο με κάποιο p (μήκος άντλησης)
- Βήμα 3:
 - Βρίσκουμε μια λέξη w της B με μήκος μεγαλύτερο του p που δεν επιδέχεται άντληση
- Βήμα 4:
 - Μελετούμε όλες τις δυνατές διαιρέσεις της w σε τμήματα u, v, x, y, z , και δείχνουμε ότι υπάρχει τιμή για το i τέτοια ώστε $uv^ixy^iz \notin B \Rightarrow \text{ΑΤΟΠΙΟ}$

Παράδειγμα 1

- Έστω $B = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\}$
- Βήμα 1:
 - Υποθέτουμε ότι B είναι ασυμφραστική
- Βήμα 2:
 - Έστω p το μήκος της άντλησης
- Βήμα 3:
 - Επιλέγουμε την λέξη $w = a^p b^p c^p$
 - Από το λήμμα της άντλησης $w = uvxyz$ και για $i \geq 0$, $uv^i xy^i z \in B$

Παράδειγμα 1 (συν.)

- Βήμα 4:
 1. Περίπτωση 1: Αμφότερες οι λέξεις v και y περιέχουν μόνο ένα είδος συμβόλων
 - Τότε η λέξη uv^2xy^2z δεν περιέχει το ίδιο πλήθος από $a, b, c \Rightarrow$ άτοπο
 2. Κάποια από τις v και y περιέχει περισσότερα από ένα είδος συμβόλων
 - Τότε η λέξη uv^2xy^2z μπορεί να περιέχει το ίδιο πλήθος από a, b, c αλλά σε λανθασμένη σειρά \Rightarrow άτοπο
- Όλες οι περιπτώσεις μας οδηγούν σε άτοπο
 - Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άντληση στη λέξη $a^p b^p c^p$
 - Η B δεν είναι ασυμφραστική

Παράδειγμα 2

- Να δείξετε ότι η πιο κάτω γλώσσα δεν είναι ασυμφραστική.

$$D = \{ww \mid w \in \{0,1\}^*\}$$